ÜBER DIE EIGENBEWEGUNGEN DER FIXSTERNE

KRITIK DER ZWEISCHWARMHYPOTHESE

VON

S. OPPENHEIM

KAROLINENTHAL, PRAG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 23. MÄRZ 1911.

Die bisher bekannten Methoden, die zur Bestimmung des Zielpunktes der Bewegung der Sonne im Raume aufgestellt und auch auf Grund des gegebenen Materials an bekannten Eigenbewegungen von Fixsternen numerisch verwertet wurden, haben alle das gemeinsame, daß sie die Reste, die bei der zur Trennung der wahren Bewegungen der Sterne von der Sonnenbewegung durchgeführten Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate übrigbleiben, mit den wahren oder Spezialbewegungen der Sterne identifizieren. Indem dann für sie nach Art der bei jeder Ausgleichung übrigbleibenden, sogenannten zufälligen Fehler das Gauß'sche Fehlergesetz gelten muß, liegt allen diesen Methoden implizite die Hypothese zugrunde, daß die Spezialbewegungen der Sterne weder ihrer Richtung noch ihrer Größe nach einen systematischen Charakter haben oder daß sich die Sterne so durcheinanderbewegen wie die Moleküle eines Gases, deren Bewegungen das Maxwell'sche Verteilungsgesetz beherrscht. Erst in den letzten Jahren haben die Untersuchungen einerseits von Kobold,[1] anderseits von Kapteyn[2] Zweifel an der Zulässigkeit dieser Hypothese entstehen lassen. Es zeigte sich nämlich, daß in den Spezialbewegungen der Sterne doch eigentümliche Regelmäßigkeiten oder Gesetzmäßigkeiten auftreten, die man am besten dahin deuten zu können glaubte, als ob es im Raume neben der Bewegungsrichtung der Sonne noch eine Reihe anderer ausgezeichneter Bewegungsrichtungen gebe, denen die Sterne mit Vorliebe folgen. Speziell Herr Kapteyn stellte die neue Hypothese auf, daß das ganze System der Fixsterne aus zwei Schwärmen bestehe, deren Bewegungen ganz unabhängig voneinander vor sich gehen und die sich gegenseitig so durchsetzen, wie die Moleküle zweier selbst ganz verschiedenartiger Gase sich gegenseitig durchdringen und für den Fall des Gleichgewichtes der Druck in jedem Punkte gleich ist der Summe der Druckkräfte, welche von jedem Gase für sich ausgeübt werden. Ist diese Hypothese richtig, dann ist die Bewegung der Sterne nicht mehr von der Bewegung der Sonne allein abhängig, man hat auch nicht mehr von der Bestimmung des Zielpunktes dieser Bewegung allein zu sprechen, vielmehr erweitere sich die

[1] Kobold, Der Bau des Fixsternsystems. Braunschweig 1906.

[2] Kapteyn, On Star-Streaming. Report of the British Association for Advancement of Sciences 1905. Referat im Bulletin astronomique. Paris 1906, p. 480.

zu lösende Aufgabe dahin, die Bewegungsrichtungen beider Sternschwärme gegeneinander und relativ zur Sonne aus den beobachteten Eigenbewegungen der Sterne festzulegen.

Der erste, welcher diese neue Anschauung Kapteyn's einer mathematischen Behandlung unterwarf, war Herr Eddington[1] in Greenwich. Das Material zur Durchführung der Rechnung lieferte ihm die an der Sternwarte in Greenwich vorgenommene Neubearbeitung des Sternkataloges von Groombridge. Die aus ihr abgeleiteten Eigenbewegungen der Fixsterne, die auf Beobachtungen von

Groombridge	aus den Jahren	1806 bis 1814
Radcliffe	» » »	1845 » 1851
Greenwich	» » »	1890 » 1896

beruhen, besitzen einen ziemlich hohen Grad von Genauigkeit. Eine zweite Rechnung Eddington's umfaßt die Eigenbewegungen der Sterne in dem »Preliminary General Catalogue« von 6188 Sternen des Professsors Boss.

Die Annahme, von der Herr Eddington bei seinen neuen Berechnungen ausgeht, ist die, daß das Maxwell'sche Gesetz von der zufälligen Verteilung der Geschwindigkeiten nicht für das System der Fixsterne im ganzen, sondern einzeln innerhalb eines jeden der zwei einander durchdringenden Sternschwärme gilt. Die Ergebnisse, zu denen er auf Grund dieser Annahme gelangt, sind die folgenden:

a) Bewegungsrichtung des Schwarms I:	aus den	Groombridge-Sternen	$\alpha = 90°$	$\delta = -19°$
	» »	Boss-Sternen . . .	$\alpha = 91$	$\delta = -15$
b) » » » II:	» »	Groombridge-Sternen	$\alpha = 292$	$\delta = -58$
	» »	Boss-Sternen . . .	$\alpha = 288$	$\delta = -64$
c) relative Bewegung der beiden Schwärme gegeneinander	» »	Groombridge-Sternen	$\alpha = 95$	$\delta = +3$
	» »	Boss-Sternen . . .	$\alpha = 94$	$\delta = +12$

und endlich die Bewegungsrichtung der Sonne, relativ gegen einen Punkt, um den sich die Geschwindigkeiten der Sterne symmetrisch gruppieren (etwa den Schwerpunkt)

aus den	Groombridge-Sternen	$\alpha = 267°$	$\delta = +30°$
» »	Boss-Sternen . . .	$\alpha = 267$	$\delta = +36°$.

Gegen diese Hypothese Kapteyn-Eddington's erhob Herr Schwarzschild[2] in Potsdam den Einwand, daß sie mit der Vorstellung von der Einheitlichkeit des ganzen Milchstraßensystems schwer vereinbar sei, einer Vorstellung, die besonders durch die Untersuchungen von Seeliger in München fest begründet erscheine. Herr Schwarzschild stellt ihr eine zweite, wesentlich von ihr verschiedene Hypothese entgegen. Ihr Hauptinhalt besteht darin, dem Raum eine Art krystallinischen Gefüges zuzuschreiben, derart, daß die Geschwindigkeiten in ihm zwar nach verschiedenen Richtungen hin verschieden verlaufen, aber doch so weit gesetzmäßig, wie etwa die Ausbreitung des Lichtes in Krystallen nicht kugelförmig, sondern ellipsoidisch vor sich geht. Die Hauptachsen des Geschwindigkeitsellipsoides stellen die ausgezeichneten Bewegungsrichtungen vor, die von den Sternen mit Vorliebe begangen werden.

Die Darstellung der beobachteten Abweichungen in der Verteilung der Eigenbewegungen der Fixsterne von der rein zufälligen und dem Maxwell'schen Gesetze entsprechenden und daher auch die

---

[1] Eddington, The systematic motions of the stars«: Monthly Notices of the R. A. S. 1907, p. 34, und The systematic motions of the stars of Prof. Boss Preliminary General-Catalogue. In Monthly Notices 1910, p. 4.

[2] Schwarzschild: »Über die Eigenbewegungen der Fixsterne«. Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen 1907, p. 614.

Darstellungen der in den Spezialbewegungen konstatierten Gesetzmäßigkeiten ist nach beiden Hypothesen, der Kapteyn-Eddington'schen wie der Schwarzschild'schen, eine gleich gute und daher ein Schluß, welcher von beiden Hypothesen vor der anderen der Vorzug zu geben sei, heute noch unmöglich.

Indes ist weder die eine noch die andere Hypothese zur Erklärung dieser Gesetzmäßigkeiten notwendig. Es genügt zu demselben Zwecke noch eine einfachere Voraussetzung, als es die beiden Hypothesen sind, eine Voraussetzung, welche diese Gesetzmäßigkeiten in eine Analogie bringt mit jenen, die sich im geozentrischen Laufe der kleinen Planeten zeigen, die sich in Form eines Schwarmes zwischen Jupiter und Mars bewegen. Es ist klar, daß in den geozentrischen Bewegungen des Schwarms der kleinen Planeten sowohl was die Größe dieser Eigenbewegungen als auch was die Zahl der Planeten in ihrer Abhängigkeit von den einzelnen Rektaszensionsstunden anlangt, Gesetzmäßigkeiten vorhanden sein müssen. Wenn nunmehr nachgewiesen werden kann, daß diese Gesetzmäßigkeiten nahezu den gleichen Charakter besitzen wie die in den Spezialbewegungen der Sterne konstatierten, so erscheint damit eine neue Anschauung zur Erklärung dieser Gesetzmäßigkeiten begründet, die durch die Worte ausgedrückt werden kann: Das System der Fixsterne hat man als ein System zu betrachten, dessen Bewegungen einzig durch die zwischen seinen einzelnen Gliedern wirkenden und vielleicht dem Newton'schen Gesetze gehorchenden Anziehungskräfte geregelt werden.

§ 1. Die Gyldén'sche Methode zur Bestimmung des Zielpunktes der Sonnenbewegung.

Der Grundgedanke der folgenden Untersuchung geht auf Gyldén[1] zurück. Gyldén war der erste, der auf die Analogie hinwies, welche einerseits zwischen der Berechnung des Apex der Sonnenbewegung aus den beobachteten Eigenbewegungen der Fixsterne und anderseits der Möglichkeit einer Bestimmung der Bewegungsrichtung der Erde aus den Beobachtungen über den geozentrischen Lauf der kleinen Planeten bestehe. Auf Grund dieser Analogie stellte er ein recht einfaches Verfahren auf, den Zielpunkt der Sonnenbewegung zu berechnen. Es besteht darin, die Eigenbewegungen der Sterne in eine nach den sphärischen Koordinaten der Rektaszension und Deklination fortschreitende Reihe zu entwickeln. Die von den sphärischen Funktionen erster Ordnung abhängigen Glieder charakterisieren sodann die gesuchte Apexbewegung. Ganz in derselben Art würden, wenn man die geozentrische Bewegung der kleinen Planeten für einen bestimmten Tag eines Jahres in eine analoge Reihe entwickelt, deren Glieder erster Ordnung die Bewegung der Erde an diesem Tage ihrer Richtung nach festlegen.

Indem nun Gyldén zur Vereinfachung der Untersuchung, die als erste mehr den Charakter einer vorbereitenden als einer abschließenden haben sollte, nur Sterne in Betracht zieht, die in einer so engen Zone liegen, daß ihre Deklinationen ohne merklichen Fehler als konstant angesehen werden können und er daher nur die Eigenbewegungen in Rektaszension berücksichtigt, verwandelt sich ihm die im allgemeinen Falle nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe in eine einfache Fourier'sche Entwicklung, deren einzelne Glieder sin und cos von Vielfachen der Rektaszension sind.

Als Beispiel einer derartigen Reihe gibt Gyldén die folgende an, als Mittel von vier Reihen von aus verschiedenen Katalogen entnommenen Eigenbewegungen von Fixsternen:

$$
\begin{aligned}
\cos\delta\,\Delta\alpha = & -2^{s}40 & = & -2^{s}40 \\
& +5\cdot81\cos\alpha+0^{s}40\sin\alpha & & +5\cdot82\cos(\alpha-3°56') \\
& -1\cdot21\cos 2\alpha-0\cdot40\sin 2\alpha & & +1\cdot27\cos(2\alpha-198\;\;17) \\
& -0\cdot67\cos 3\alpha+0\cdot66\sin 3\alpha & & +1\cdot02\cos(3\alpha-135\;\;26) \\
& -0\cdot04\cos 4\alpha-1\cdot46\sin 4\alpha & & +1\cdot46\cos(4\alpha-269\;\;50) \\
& +0\cdot16\cos 5\alpha+0\cdot50\sin 5\alpha & & +0\cdot53\cos(5\alpha-72\;\;17) \\
& +0\cdot29\cos 6\alpha & & +0\cdot29\cos 6\alpha \qquad \text{(Zeiteinheit, 100 Jahre).}
\end{aligned}
$$

[1] Gyldén, Antydningar om lagbundenheit i Sternjornas rörelser. Berichte der kgl. Akademie der Wissenschaften, Stockholm 1872. Referat. Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft, Leipzig 1874, p. 173.

Das erste vom cos des einfachen Winkels α abhängige Glied gibt für den Apex der Sonnenbewegung die Richtung an, die aus der Gleichung

$$\cos(\alpha - 3^\circ\ 56') = 0$$

gefunden wird, zu

$$\alpha = 93^\circ\ 56' \text{ beziehungsweise } 273^\circ\ 56'$$

welcher Wert mit den nach anderen Methoden gefundenen in guter Übereinstimmung steht. Gleichzeitig leitet er aus den geozentrischen Bewegungen der kleinen Planeten für den 21. März 1868 die Reihe ab:

$$\begin{array}{llll}
\cos\delta\Delta\alpha = + 9\cdot59 & & = + 9\cdot59 & \\
\qquad +17\cdot56 \cos\alpha & + 2\cdot75 \sin\alpha & +17\cdot77 \cos(\alpha - 8^\circ\ 54') & \\
\qquad - 2\cdot49 \cos 2\alpha & + 0\cdot22 \sin 2\alpha & + 2\cdot50 \cos(2\alpha - 174\ \ 57) & \\
\qquad + 1\cdot25 \cos 3\alpha & + 1\cdot35 \sin 3\alpha & + 1\cdot84 \cos(3\alpha - 47\ \ 12) & \\
\qquad + 0\cdot08 \cos 4\alpha & - 1\cdot30 \sin 4\alpha & + 1\cdot30 \cos(4\alpha - 273\ \ 32) & \\
\qquad - 0\cdot84 \cos 5\alpha & - 0\cdot01 \sin 5\alpha & + 0\cdot84 \cos(5\alpha - 180\ \ 41) & \\
\qquad - 0\cdot41 \cos 6\alpha & & + 0\cdot41 \cos(6\alpha - 180^\circ) & \text{(Zeiteinheit 1 Tag)}
\end{array}$$

und zieht aus ihr, indem er nur wieder das erste vom cos des einfachen Winkels abhängige Glied berücksichtigt, folgende Schlüsse:

1. Die Erde bewegt sich am 21. März gegen einen Punkt, dessen Rektaszension, abgeleitet aus der Gleichung $\cos(\alpha - 8^\circ\ 54') = 0$, zu $\alpha = 278^\circ\ 54'$ folgt und nur um etwa 1° fehlerhaft ist.

2. Die Rektaszension der Sonne oder des Zentralpunktes, um den die Planeten sich bewegen, berechnet aus der Gleichung $\cos(\alpha - 8^\circ\ 54') = 1$ zu $\alpha = 8^\circ\ 54'$, erscheint mit einem Fehler von etwa 6° behaftet.

3. Nahe mit den wahren Verhältnissen übereinstimmend, ergibt sich für die mittlere Entfernung der kleinen Planeten von der Sonne ein Wert, der etwa dreimal so groß ist wie die Entfernung zwischen Erde und Sonne, nämlich

$$\sqrt{\left(\frac{17\cdot77}{9\cdot59}\right)^3} = 2\cdot5 \text{ approximativ } = 3.$$

Unwillkürlich drängt sich hier nun die Frage auf, ob denn die in den beiden Reihen auftretenden höheren Glieder gar keine reale Bedeutung besitzen und eben bloß zufälligen Umständen, wie Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Planeten oder Fixsterne oder Ungenauigkeiten in den zu ihrer Berechnung verwendeten numerischen Daten, oder zufälligen Fehlern irgendwelcher anderen Art ihre Entstehung verdanken oder ob ihnen im Gegenteil eine reale Bedeutung zuzuschreiben ist und, wenn dies der Fall sein sollte, worin diese besteht. Leider gibt Gyldén auf diese Frage keine entscheidende Antwort. Einerseits meint er, daß diese Glieder verschwinden müßten, wenn die Spezialbewegungen der Sterne vollständig regellos, das heißt dem Maxwell'schen Verteilungsgesetze entsprechend, verlaufen, und daher, wenn sie dennoch vorhanden sind, nur aus zufälligen Fehlern entspringen. Anderseits kann er sich doch der Ansicht nicht entschlagen, daß beide Reihen, abgesehen von den verschiedenen Zeiteinheiten (in der ersten ein Jahrhundert, in der zweiten ein Tag) und ebenso von den verschiedenen Maßeinheiten (Bogensekunden und Bogenminuten), in ihrem Baue eine auffallende Ähnlichkeit zeigen, die sich namentlich in einer Regelmäßigkeit in der Abnahme der einzelnen Glieder, das heißt in der schwachen Konvergenz derselben, kundgibt, und daß dies darauf hindeute, daß bei der Bildung der beiden Reihen nicht der Zufall allein mitspielte; sondern wohl auch eine Gesetzmäßigkeit vorhanden sein müsse. Ist dies aber der Fall, so würde dies heißen, daß die beobachteten Sterne einem System angehören, das nach Art der Planeten einer Zentralkraft unterliegt, und daß der Zentralkörper oder auch der Zentralpunkt in einer Richtung zu

suchen sei, deren Rektaszension mit der der Sonne in der zweiten Hälfte des März zusammenfällt. Der Nachweis dieser Gesetzmäßigkeiten, das heißt der Nachweis der Realität der höheren Glieder in den zwei Reihen, sei gleichbedeutend mit einer wichtigen stellar-astronomischen Entdeckung, wenn auch durch sie noch kein Beweis für die Zentralbewegung der Sterne gegeben erscheine.

Um die angeregte Frage zu entscheiden, liegt vorerst der Gedanke nahe, die durch die einzelnen Glieder in der Fourier'schen Entwicklung gegebenen Richtungen als mehrfache von den Sternen bevorzugte Bewegungsrichtungen aufzufassen. Es kommt diese Anschauung der Hypothese gleich, als ob jedes Glied der Reihe einen speziellen Schwarm von Sternen charakterisieren und daher das System aller Fixsterne sich nicht im Kapteyn-Eddington'schen Sinne bloß aus zweien, sondern aus mehreren bestimmte Himmelsrichtungen in ihren Bewegungen vorziehenden Schwärmen zusammensetzen würde. Tatsächlich gibt neben der durch das erste Glied aus der Gleichung $\cos(\alpha - 3° 56') = 0$ zu $\alpha = 273° 56'$ abgeleiteten Bewegungsrichtung der Sonne das zweite, vom cos des doppelten Winkels α abhängige Glied aus

$$\cos(2\alpha - 198° 17') = 1$$
$$2\alpha - 198 \quad 17 = 0$$

folgend, die neue Richtung

$$\alpha = 99° 8'$$

an, welche von der von Eddington gefundenen relativen Bewegungsrichtung der beiden Schwärme gegeneinander, wie p. 2 angeführt wurde

$$\alpha = 94°$$

nur um wenige Grade abweicht. Damit gewinnt diese neue Hypothese an Gewicht und, um die Bewegungsrichtungen aller den einzelnen Gliedern der Fourier'schen Entwicklung entsprechenden Sternschwärme aufzufinden, hätte man nur die Eigenbewegungen der Fixsterne in eine nach Kugelfunktionen von Rektaszension und Deklination fortschreitende Reihe zu entwickeln. Die einzelnen Glieder dieser Reihe würden sodann mit einer Genauigkeit, die im umgekehrten Verhältnisse zum Range oder zur Ordnungszahl des Gliedes steht, je einen Schwarm von parallel sich bewegenden Sternen charakterisieren.

Indes, abgesehen davon, daß eine solche Darstellung auf Grund des heute gegebenen Materials an bekannten Eigenbewegungen von Fixsternen heute noch nicht möglich ist, hätte man doch zunächst die Frage zu beantworten, welche Bedeutung die in den höheren Gliedern der Reihe für die Planeten auftretenden Koeffizienten und Winkelgrößen haben. Sind diese Glieder nur aus zufälligen Umständen, wie etwa Unregelmäßigkeiten in der heliozentrischen Verteilung der Planeten, oder Ungenauigkeiten in der zur Berechnung verwendeten numerischen Daten über ihre geozentrische Bewegung entstanden oder, im Gegenteil gruppiert sich das ganze System der kleinen Planeten in ähnlicher Weise wie das System der Fixsterne aus mehreren jedem einzelnen Gliede der Fourier'schen Entwicklung entsprechenden Teilschwärmen und, wenn dies der Fall ist, welche Bedeutung haben dann die verschiedenen Schwarmrichtungen gegenüber der einen Hauptrichtung, die in diesem System gegeben ist, nämlich der Richtung nach der Sonne oder dem Zentralkörper?

§ 2. Die geozentrische Bewegung der kleinen Planeten.

Zur Entscheidung dieser Frage entnahm ich dem Berliner Jahrbuch für 1890, das noch die Jahresephemeriden der kleinen Planeten für das Jahr 1888 enthält, die geozentrischen $\cos \delta \, \Delta \alpha$ für folgende vier Zeitepochen:

1. 1888 Jänner 7.	aus dem 20 tägigen Intervalle	Jänner	7—27
2. 1888 Mai 6.	» » » »	Mai	6—26
3. 1888 September 3.	» » » »	September	3—23
4. 1888 Dezember 12.	» » » »	Dezember	12—32

und leitete aus ihnen die nachstehenden 12 Mittelwerte für je zwei zu zwei Stunden ab:

	1. 1888 Jänner 7	2. 1888 Mai 6.	3. 1888 Sept. 3.	4. 1888 Dez. 12.
0^h	$+26^m671$	$+27^m680$	-15^m129	$+17^m560$
2	+16·647	+29·641	− 5·769	+ 4·915
4	+ 0·250	+34·806	+ 8·164	−11·430
6	−11·044	+30·904	+22·130	−17·940
8	−17·682	+25·532	+26·900	−12·073
10	−10·753	+13·989	+30·111	− 0·645
12	+ 4·872	− 0·088	+29·200	+13·782
14	+16·117	−12·562	+28·220	+23·284
16	+25·787	−16·481	+22·687	+30·900
18	+33·904	−11·200	+13·638	+34·278
20	+33·790	+ 4·625	− 0·336	+34·056
22	+28·733	+17·963	−11·211	+25·862

Zeiteinheit = 20 Tage, Maßeinheit = Zeitminute.

Die aus diesen Zahlen berechneten Fourier'schen Reihen lauten:

1. 1888 Jänner 7.:

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\alpha = &+12^m2743 &&= +12^m2743\\ &+11\cdot5706\cos\alpha - 21^m8530\sin\alpha &&+24\cdot7271\cos(\alpha-297°\ 54'0)\\ &+\ 2\cdot1637\cos 2\alpha+3\cdot5670\sin 2\alpha &&-\ 4\cdot1719\cos(2\alpha-248\ \ 45\cdot5)\\ &-\ 0\cdot6893\cos 3\alpha+0\cdot9987\sin 3\alpha &&+\ 1\cdot2135\cos(3\alpha-124\ \ 36\cdot8)\\ &+\ 1\cdot3264\cos 4\alpha+0\cdot7075\sin 4\alpha &&-\ 1\cdot5033\cos(4\alpha-208\ \ 4\cdot7)\\ &+\ 0\cdot0183\cos 5\alpha+0\cdot3777\sin 5\alpha &&+\ 0\cdot3781\cos(5\alpha-\ 87\ \ 13\cdot5)\\ &+\ 0\cdot0070\cos 6\alpha &&+\ 0\cdot0070\cos 6\alpha\end{aligned}$$

2. 1888 Mai 6.:

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\alpha = &+12^m0599 &&= +12^m0599\\ &+13\cdot8379\cos\alpha + 20^m6441\sin\alpha &&+24\cdot8530\cos(\alpha-\ 56°\ 10'0)\\ &+\ 1\cdot3529\cos 2\alpha-4\cdot0250\sin 2\alpha &&-\ 4\cdot2464\cos(2\alpha-108\ \ 34\cdot6)\\ &-\ 0\cdot4353\cos 3\alpha-0\cdot6309\sin 3\alpha &&+\ 0\cdot7665\cos(3\alpha-235\ \ 23\cdot7)\\ &-\ 0\cdot2359\cos 4\alpha-0\cdot5831\sin 4\alpha &&-\ 0\cdot6290\cos(4\alpha-\ 67\ \ 58\cdot4)\\ &+\ 0\cdot4814\cos 5\alpha-0\cdot2229\sin 5\alpha &&+\ 0\cdot5305\cos(5\alpha-335\ \ 9\cdot3)\\ &+\ 0\cdot6190\cos 6\alpha &&+\ 0\cdot6100\cos 6\alpha\end{aligned}$$

3. 1888 September 3.:

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\alpha = &+12^m3838 &&= +12^m3838\\ &-21\cdot7384\cos\alpha + 3^m8614\sin\alpha &&+22\cdot0790\cos(\alpha-169°\ 55'7)\\ &-\ 4\cdot9548\cos 2\alpha+1\cdot1313\sin 2\alpha &&-\ 5\cdot0822\cos(2\alpha-347\ \ 8\cdot3)\\ &-\ 0\cdot4283\cos 3\alpha-0\cdot1932\sin 3\alpha &&+\ 0\cdot4699\cos(3\alpha-204\ \ 16\cdot7)\\ &+\ 0\cdot0760\cos 4\alpha-0\cdot1062\sin 4\alpha &&-\ 0\cdot1306\cos(4\alpha-125\ \ 35\cdot3)\\ &+\ 0\cdot0022\cos 5\alpha+0\cdot1914\sin 5\alpha &&+\ 0\cdot1914\cos(5\alpha-\ 89\ \ 20\cdot3)\\ &-\ 0\cdot4694\cos 6\alpha &&-\ 0\cdot4694\cos 6\alpha\end{aligned}$$

4) 1888 Dezember 12.:

$$
\begin{aligned}
\cos\delta\,\Delta\alpha = &+11^{m}8792 & &= +11^{m}8792 \\
&+\ 2\cdot1210\cos\alpha - 25^{m}2107\sin\alpha & &+25\cdot3065\cos(\alpha - 274°\ 48'5) \\
&+\ 3\cdot4977\cos2\alpha + 0\cdot0671\sin2\alpha & &-\ 3\cdot4983\cos(2\alpha - 181\ \ 5\cdot9) \\
&-\ 0\cdot0033\cos3\alpha + 1\cdot2237\sin3\alpha & &+\ 1\cdot2237\cos(3\alpha - 90\ \ 9\cdot3) \\
&+\ 0\cdot0411\cos4\alpha + 0\cdot7926\sin4\alpha & &-\ 0\cdot7937\cos(4\alpha - 267\ \ 1\cdot7) \\
&-\ 0\cdot2282\cos5\alpha + 0\cdot3253\sin5\alpha & &+\ 0\cdot3975\cos(5\alpha - 125\ \ 3\cdot0) \\
&+\ 0\cdot2535\cos6\alpha & &+\ 0\cdot2535\cos6\alpha
\end{aligned}
$$

Die Glieder erster Ordnung in diesen Reihen bestätigen das Gyldén'sche Resultat. Sie bestimmen die Bewegungsrichtung der Erde für den angegebenen Tag oder die Rektaszension der Sonne mit der gleichen Genauigkeit, wie es in der Gyldén'schen Reihe der Fall ist, nämlich

1. 1888	Jänner 7. . . .	α = 297°	54'0	α der Sonne für die Mitte der Zeit: Jänner 17. . .	= 299°
2.	Mai 6.	= 56	10·0	» » » » » » » Mai 16.	= 52
3.	September 3. .	= 169	55·7	» » » » » » » September 13. .	= 171
4.	Dezember 12. .	= 274	48·5	» » » » » » » Dezember 22. .	= 271

Ebenso folgen aus ihnen für die mittlere tägliche Bewegung der Erde, sie sei mit μ_0 bezeichnet, die Werte:

1. 297° 54'0		
2. 56 10·0	Differenz 118° 16'0 für eine Zwischenzeit von 120 Tagen, daher	μ_0 = 59'14
3. 169 55·7	» 113 45·7 » » » » 120 » »	= 56·88
4. 274 48·5	» 104 52·8 » » » » 100 » »	= 62·93

im Mittel $\mu_0 = 59'65$,

welcher Mittelwert mit dem wahren Werte, der bekanntlich $\mu_0 = 59'14$ ist, so weit übereinstimmt, als es dem Grade der Genauigkeit entspricht, mit der diese Winkel die Rektaszension der Sonne wiedergeben.

Führt man diese Rechnung auch mit den in den Gliedern der höheren Ordnung auftretenden Winkelgrößen durch, so ergibt sich das gleiche Resultat, nur daß die Abweichungen der gerechneten μ_0 von dem wahren Werte $\mu_0 = 59'14$ mit zunehmender Ordnungszahl immer größer werden. Man erhält:

a) aus den Gliedern 2. Ordnung:

248° 45'5 = 248° 45'5		
108 34·6+360 = 468 34·6	Differenz 219° 49'1, Zwischenzeit 120 Tage, daher	$2\mu_0$ = 109'91
347 8·3+360 = 707 8·3	» 238 33·7 » 120 » »	= 119·28
181 5·9+720 = 901 5·9	» 193 57·6 » 100 » »	= 116·38

und im Mittel $\mu_0 = 57'59$

b) aus den Gliedern 3. Ordnung:

124° 36'8 = 124° 36'8		
235 23·7+ 360 = 595 23·7	Differenz 470° 46'9, Zwischenzeit 120 Tage, daher	$3\mu_0$ = 235'47
204 16·7+ 720 = 924 16·7	» 328 53·0 » 120 » »	= 164·44
90 9·3+1080 = 1170 9·3	» 245 52·6 » 100 » »	= 147·53

und im Mittel $\mu_0 = 60'83$

c) aus den Gliedern 4. Ordnung:

208°	4'7		= 208°	4'7		
67	58·4	+ 720	= 787	58·4	Differenz 579° 53'7 Zwischenzeit 120 Tage, daher 4 μ_0	= 289'95
125	35·3	+1080	= 1205	35·3	» 417 36·9 » 120 » »	= 208·81
267	1·6	+1260	= 1527	1·6	» 321 26·3 » 100 » »	= 192·86

und im Mittel $\mu_0 = 57'64$

d) aus den Gliedern 5. Ordnung:

87°	13·5		= 87°	13'5		
335	9·3	+ 360	= 695	9·3	Differenz 607° 55'8, Zwischenzeit 120 Tage, daher 5 μ_0	= 303'96
89	20·3	+1080	= 1169	20·3	» 474 11·0 » 120 » »	= 237·09
125	3·0	+1440	= 1565	3·0	» 395 42·7 » 100 » »	= 237·42

und im Mittel $\mu_0 = 51'90$.

Erkennt man so, daß diese Winkelgrößen in den Gliedern höherer Ordnung sowie die Winkelgröße im Gliede erster Ordnung der Bewegung der Erde folgen und für die mittlere tägliche Winkelgeschwindigkeit derselben Werte liefern, die dem wahren Werte 59' 14 recht nahe kommen, so muß man daraus schließen, daß sie keineswegs irgendwelche bevorzugte Bewegungsrichtungen im Raume vorstellen, sondern untereinander in einem einfachen Zusammenhange stehen, daß es also im System der kleinen Planeten, was ihren geozentrischen Lauf anlagt, nur eine ausgezeichnete Richtung gibt, das ist die nach der Sonne als dem Zentralkörper des Systems, und daß sich aus ihr alle anderen Winkelgrößen berechnen lassen müssen. Hat also die Entwicklung der geozentrischen Bewegungen die Form

$$\cos\delta\,\Delta\alpha = \varkappa_0+\varkappa_1\cos(\alpha-\varepsilon_1)-\varkappa_2\cos(2\alpha-\varepsilon_2)+\varkappa_3\cos(3\alpha-\varepsilon_3)-\ldots$$

so sind die Winkel $\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ldots$ nur infolge von zufälligen Fehlern von ε_1 verschieden. Vielmehr sollten die Beziehungen

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_3 = 3\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_4 = 4\varepsilon_1\ldots$$

gelten und die Fourier'sche Reihe daher

$$\cos\delta\,\Delta\alpha = \varkappa_0+\varkappa_1\cos(\alpha-\varepsilon)-\varkappa_2\cos 2(\alpha-\varepsilon)+\varkappa_3\cos 3(\alpha-\varepsilon)-\ldots$$

lauten. Inwieweit diese Bedingungsgleichungen erfüllt sind, zeigt die folgende bloß bis zu den Gliedern dritter Ordnung fortgeführte Berechnung:

1. 1888 Jänner 7.:

$\varepsilon_1 = 297°\ 54'$ — $\varepsilon_1 = \varepsilon = 297°\ 54'$

$\varepsilon_2 = 248\ \ 46\ \ +360°$ — $\frac{1}{2}\ \varepsilon_2 = \varepsilon = 304\ \ 23$

$\varepsilon_3 = 124\ \ 37\ \ +720$ — $\frac{1}{3}\ \varepsilon_3 = \varepsilon = 281\ \ 32$

2. 1888 Mai 6:

$\varepsilon_1 = 56°\ 10'$ — $\varepsilon_1 = \varepsilon = 56°\ 10'$

$\varepsilon_2 = 108\ \ 35$ — $\frac{1}{2}\ \varepsilon_2 = \varepsilon = 54\ \ 17$

$\varepsilon_3 = 235\ \ 24$ — $\frac{1}{3}\ \varepsilon_3 = \varepsilon = 78\ \ 28$

3. 1888 September 3.:

$$\varepsilon_1 = 169° \; 56' \qquad\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon = 169° \; 56'$$

$$\varepsilon_2 = 347 \;\; 8 \qquad\qquad \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 = \varepsilon = 173 \;\; 34$$

$$\varepsilon_3 = 204 \;\; 17 + 360' \qquad \frac{1}{3}\,\varepsilon_3 = \varepsilon = 188 \;\; 6$$

4. 1888 Dezember 12.:

$$\varepsilon_1 = 274° \; 48' \qquad\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon = 274° \;\; 8'$$

$$\varepsilon_2 = 181 \;\; 6 + 360' \qquad \frac{1}{2}\,\varepsilon_3 = \varepsilon = 271 \;\; 33$$

$$\varepsilon_3 = 90 \;\; 9 + 720 \qquad \frac{1}{3}\,\varepsilon_3 = \varepsilon = 270 \;\; 3$$

Ebenso wie man diese Beziehungsgleichungen trotz der in einigen Fällen auftretenden größeren Differenzen im ganzen wird als erfüllt ansehen können, wird man auch nicht fehlgehen, die Koeffizienten der p. 6 [302] angeführten Fourier'schen Reihen als identisch anzunehmen und ihre Unterschiede als Ungenauigkeiten der Rechnung oder der numerischen Daten zufälligen Fehlern zuzuschreiben. Tatsächlich sind auch die Abweichungen vom Mittelwerte stets nur geringe. Man hat:

	1.	2.	3.	4.	Mittel
$\varkappa_0$	$12^{m}2743$	$12^{m}0599$	$12^{m}3838$	$11^{m}8792$	$12^{m}1493$
$\varkappa_1$	24·7271	24·8530	22·0790	25·3065	24·2414
$\varkappa_2$	4·1719	4·2464	5·0822	3·4983	4·2497
$\varkappa_3$	1·2135	0·7665	0·4699	1·2237	0·9179
$\varkappa_4$	1·5033	0·6290	0·1306	0·7937	0·7641
$\varkappa_5$	0·3781	0·5305	0·1914	0·3975	0·3844

§ 3. Theoretische Ableitung der Reihe für $\cos\delta \,.\, \Delta\alpha$.

Es ist nicht schwer, unter gewissen einfachen Annahmen eine theoretische Entwicklung der für die geozentrischen Bewegungen der Planeten aufgestellten Reihe zu geben und diese dann mit der aus den Beobachtungen selbst abgeleiteten zu vergleichen. Diese einfachsten Annahmen sind:

1. Erde und die Planeten bewegen sich in Kreisen um die Sonne.
2. Die Bahnebenen derselben fallen zusammen.

Auf die Exzentrizitäten der Bahnen sowie die Neigungswinkel gegen die Ekliptik werde keine Rücksicht genommen.

Indem diese Entwicklung nur den Zweck verfolgt, die im geozentrischen Lauf der Planeten sich zeigenden Gesetzmäßigkeiten in ihren allgemeinsten Zügen zu charakterisieren, und keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch erheben will, dürften diese denkbar einfachsten Annahmen doch als genügend betrachtet werden.

Die heliozentrischen Koordinaten der Erde für den angenommenen Jahrestag seien

$$x_0 = -a_0 \cos\varepsilon \qquad y_0 = -a_0 \sin\varepsilon$$

Es bedeutet dann α_0 die mittlere Entfernung Erde—Sonne, $180 + \varepsilon$ die heliozentrische Rektaszension der Erde oder ε die geozentrische Rektaszension der Sonne.

Ferner sei

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mu_0$$

die mittlere tägliche Bewegung der Erde. Die heliozentrischen Koordinaten eines Planeten seien

$$x = a \cos P \qquad y = a \sin P$$

und

$$\frac{dP}{dt} = \mu$$

seine mittlere tägliche Bewegung, sowie a seine mittlere Entfernung von der Sonne. Dies vorausgesetzt, sind

$$\rho \cos \alpha = a \cos P + a_0 \cos \varepsilon$$
$$\rho \sin \alpha = a \sin P + a_0 \sin \varepsilon$$

die geozentrischen Koordinaten des Planeten und die Aufgabe besteht darin, den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$ durch die Größen α, ε und $\frac{a_0}{a} = \beta$ auszudrücken.

Man findet durch Differentiation

$$\cos \alpha \frac{d\rho}{dt} - \rho \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -a\mu \sin P - a_0 \mu_0 \sin \varepsilon$$
$$\sin \alpha \frac{d\rho}{dt} + \rho \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = + a\mu \cos P + a_0 \mu_0 \cos \varepsilon$$

und daraus, indem man die erste Gleichung mit $-\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ multipliziert und beide sodann addiert,

$$\rho \frac{d\alpha}{dt} = a\mu \cos (\alpha - P) + a_0 \mu_0 \cos (\alpha - \varepsilon)$$

oder, da, wie man aus den Gleichungen für $\rho \cos \alpha$ und $\rho \sin \alpha$ leicht findet,

$$a \cos (\alpha - P) = \rho - a_0 \cos (\alpha - \varepsilon)$$

endlich

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mu + \frac{a}{\rho} \beta (\mu_0 - \mu) \cos (\alpha - \varepsilon)$$

Zur Berechnung von $\frac{a}{\rho}$ führt am einfachsten der folgende Weg. Aus den Beziehungen

$$a \cos P = \rho \cos \alpha - a_0 \cos \varepsilon$$
$$a \sin P = \rho \sin \alpha - a_0 \sin \varepsilon$$

leitet man durch Quadrieren derselben und nachheriges Addieren die quadratische Gleichung ab

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + 2 \frac{a}{\rho} \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos (\alpha - \varepsilon) - \frac{1}{1-\beta^2} = 0$$

und aus ihr schließlich die Reihe

$$\frac{a}{\rho} = -\frac{\beta}{1-\beta^2} \cos (\alpha - \varepsilon) + \gamma_0 + \gamma_2 \cos 2 (\alpha - \varepsilon) - \gamma_4 \cos 4 (\alpha - \varepsilon) + \gamma_6 \cos 6 (\alpha - \varepsilon) + \ldots$$

in welcher

$$\gamma_0 = 1 + \frac{3}{4} \beta^2 + \frac{45}{64} \beta^4 + \frac{350}{512} \beta^6$$
$$\gamma_2 = \frac{1}{4} \beta^2 + \frac{5}{16} \beta^4 + \frac{175}{512} \beta^6$$
$$\gamma_4 = \frac{1}{64} \beta^4 + \frac{14}{512} \beta^6$$
$$\gamma_6 = \frac{1}{512} \beta^6$$

ist. Durch Substitution derselben in die Gleichung für $\frac{d\alpha}{dt}$ erhält man schließlich die verlangte Entwickelung

$$\frac{d\alpha}{dt} = \delta_0 - \delta_2 \cos 2(\alpha-\varepsilon) + \delta_1 \cos(\alpha-\varepsilon) + \delta_3 \cos 3(\alpha-\varepsilon) + \delta_5 \cos 5(\alpha-\varepsilon) \ldots.$$

in welcher

$$\delta_0 = -\mu \frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}(\mu_0-\mu) \qquad \delta_2 = \frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}(\mu_0-\mu)$$

$$\delta_1 = (\mu_0-\mu)\,\beta\left(1+\frac{7}{8}\beta^2+\frac{55}{64}\beta^4\ldots\right)$$

$$\delta_3 = (\mu_0-\mu)\frac{\beta^3}{8}\left(1+\frac{15}{16}\beta^2+\frac{161}{128}\beta^4\ldots\right)$$

$$\delta_5 = (\mu_0-\mu)\frac{\beta^5}{64}\left(1+\frac{13}{8}\beta^2\ldots\right)$$

ist.

Zur Kontrolle dieser Entwicklung und um Theorie und Beobachtung miteinander vergleichen zu können, berechnete ich für die folgenden fünf Werte von lg a, nämlich

$$\lg a = 0{\cdot}44,\ 0{\cdot}45,\ 0{\cdot}46,\ 0{\cdot}47 \text{ und } 0{\cdot}48$$

die Koeffizienten δ_0 δ_1 δ_2 und δ_3, natürlich in den gleichen Einheiten (Zeiteinheit = 20 Tage und Maßeinheit = Zeitminuten), in denen sie in der aus den Ephemeriden abgeleiteten Reihe ausgedrückt sind. Es fand sich:

$\lg \alpha =$	0·44	0·45	0·46	0·47	0·48	
$\lg \beta =$	9·56	9·55	9·54	9·53	9·52	
$\delta_0 =$	12^{m}573	12^{m}189	11^{m}811	11^{m}450	11^{m}094	Mittelwert 12^{m}149
$\delta_2 =$	4·677	4·479	4·288	4·105	3·930	» 4·250
$\delta_1 =$	24·979	24·525	24·074	23·627	23·185	» 24·241
$\delta_3 =$	0·368	0·347	0·327	0·307	0·289	» 0·918

Die entsprechenden Mittelwerte derselben sind in der Kolumne »Mittelwerte« nebenangesetzt. Es führt nun, wie man durch Interpolation findet:

$\delta_0 = 12^m149$ auf lg $a = 0{\cdot}4514$ als den mittleren Wert der Entfernung Planeten—Sonne
$\delta_1 = 24{\cdot}241$ « lg $a = 0{\cdot}4562$ » » » » » » » »
$\delta_2 = 4{\cdot}250$ » lg $a = 0{\cdot}4610$ » » » » » » » »

Zahlen, die miteinander in recht guter Übereinstimmung stehen und aussagen, daß man für die mittlere Entfernung des Planetenschwarmes von der Sonne die Größe lg $a = 0{\cdot}456\ldots$ annehmen kann. Erst bei dem Koeffizienten δ_3 des Gliedes sin 3 $(\alpha-\varepsilon)$ zeigt sich eine größere Differenz zwischen Theorie und Beobachtung. Um bei diesem auf den Wert 0·918, den die Beobachtung fordert, zu gelangen, wäre lg $a = 0{\cdot}20$ anzusetzen. Bei ihm und noch mehr bei den Koeffizienten der höheren Glieder dürfte der Einfluß der Exzentrizitäten und Bahnneigungen, die in der theoretischen Entwicklung nicht in Betracht gezogen wurden, von größerem Gewichte sein als bei den ersten, δ_0 δ_1 und δ_2.

Das Ergebnis der Untersuchung, sowohl der theoretischen in diesem wie der numerischen im vorhergegangenen Abschnitte läßt sich, wie folgt aussprechen:

Bewegt sich ein Schwarm von Körpern um ein gemeinschaftliches Zentrum, so wie es etwa der Schwarm der kleinen Planeten ist, die sich um die Sonne bewegen, und wird sein Lauf von einem sich selbst um dieses Zentrum bewegenden Körper aus beobachtet, so wie man den Schwarm der Planeten

von der Erde aus beobachtet, so zeigen die Eigenbewegungen dieser Körper oder ihr geozentrischer Lauf gewisse Gesetzmäßigkeiten. Diese lassen sich durch eine nach Vielfachen der Winkeldifferenz $\alpha-\varepsilon$ fortschreitende Fourier'sche Reihe darstellen, in welcher α die Rektaszension der einzelnen sich bewegenden Körper des Systems und ε die konstante für den Zeitpunkt der Beobachtung gültige Rektaszension des gemeinschaftlichen Zentralkörpers, speziell für die Planeten die geozentrische Rektaszension der Sonne vorstellt.

Die Einfachheit dieses Ergebnisses spricht entschieden gegen die Deutung, die man der Fourier'schen Reihe auf Grund der Kapteyn-Eddington'schen Hypothese geben könnte, die Deutung nämlich, als ob jedem einzelnen Gliede der Reihe eine spezielle Gruppe von Körpern entspreche, die sich in der durch die Bedingung

$$n\,\alpha-\varepsilon_n = \text{einem Vielfachen von } 360°$$

bestimmten Richtung bewegt, worin n die Ordnungszahl dieses Gliedes und ε_n die zugehörige Winkelgröße ist, und so gleichsam das ganze System von Körpern in einzelne Gruppen oder Teilschwärme zerfalle, die dann in ihren Bewegungen gewisse Richtungen, »Heerstraßen«, bevorzugen. Tatsächlich ist nur eine einzige Richtung maßgebend, die durch die Größe ε charakterisierte und das ist die Richtung nach dem Zentralkörper des Systems oder $\varepsilon-90°$ die Bewegungsrichtung des Körpers, von dem aus die Beobachtung über die Bewegungen der Körper erfolgt.

Inwieweit dieser Schluß auf die Eigenbewegungen der Fixsterne ausgedehnt werden kann, kommt im nächsten Abschnitte zur Erörterung. Hier möge noch folgende Bemerkung eingeschoben werden.

Die Analogie zwischen den Bewegungen der Fixsterne und dem geozentrischen Lauf der Planeten, auf welche es in der vorliegenden Untersuchung zumeist ankommt, ist keine vollständige. Für diese ist der Standpunkt, von dem aus die Beobachtung der Bewegungen stattfindet, ein derartiger, daß die Bewegungen ganz außerhalb der Bahn des Beobachtungsortes vor sich gehen. Nimmt man nun auch, daß sich die Sonne und mit ihr das ganze Heer der Fixsterne in Kreisen um einen Zentralpunkt bewegen, so würde diese Anschauung bedeuten, als ob die Bahnen der Fixsterne die Bahn der Sonne einschließen, eine Anschauung, die aber weder berechtigt noch auch wahrscheinlich ist. Es ist jedoch klar, daß die gleichen Bewegungsgesetze auch für den Fall gelten, daß die Beobachtung von einem Orte aus vorgenommen wird, dessen Bahn im Gegenteile ganz außerhalb der Bahnen der beobachteten Körper liegt, so etwa, wie wenn man den Lauf der kleinen Planeten vom Jupiter aus untersuchen würde. Die für diesen Fall geltende Fourier'sche Reihe würde, wie bekannt, mit der oben entwickelten ganz identisch lauten, mit der Ausnahme, daß nunmehr die Größe $\beta = a/a_0$ wäre, wenn a_0 die Entfernung Jupiter—Sonne bedeutet, während in der ersteren $\beta = a_0/a$ war, mit der Bedeutung a_0 gleich der mittleren Entfernung Erde—Sonne. Erst wenn die Bewegung der Planeten von einem aus ihrer Mitte selbst beobachtet würde, würde sich die Darstellung etwas verwickelter gestalten und erst für diesen Fall wäre die Analogie zwischen den systematischen Bewegungen im Bereiche der Fixsterne und dem der Planeten eine vollständige. Aber auch für diesen allgemeinsten und, was das System der Fixsterne anlangt, wohl der Wahrheit am nächsten kommenden Fall ist eine Fourier'sche Entwicklung durchführbar, deren Koeffizienten dann Potenzreihen von β und $1/\beta$ sein müssten.

§. 4. Die Eigenbewegungen der Fixsterne.

Das Material zu der folgenden Untersuchung über die Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen der Fixsterne, der daraus folgenden Berechnung der Rektaszension des Apex der Sonnenbewegung und schließlich dem Nachweise, daß es neben der durch diesen Zielpunkt gegebenen Bewegungsrichtung keine andere bevorzugte Bewegungsrichtung gebe, benutzte ich die neubestimmten Eigenbewegungen von Fixsternen, die sich in dem neuen Sternkataloge der Greenwicher Sternwarte, »New Reduction of Groombridge Catalogue of circumpolar stars«, Greenwich 1905, vorfinden. Glücklicherweise enthält die

Einleitung zu diesem Kataloge auf p. 111 u. ff. schon eine Zusammenstellung der Eigenbewegungen, gruppiert einerseits nach Rektaszensionsstunden, andererseits nach nicht sehr voneinander verschiedenen Deklinationszonen, so daß die Berechnung der Eigenbewegungen und ihrer Mittelwerte keine bedeutende Arbeit mehr verursachte. Aus dieser Zusammenstellung wurden, um die in Betracht kommenden Deklinationszonen nicht gar zu breit werden zu lassen, nur die Gruppen ausgewählt, deren Deklinationen zwischen den Grenzen

$$\delta = 55-65°, \quad 45-55° \text{ und } 38-45°$$

liegen. Die Zonen mit den Deklinationen $\delta = 75-90°$ und $65-75°$ wurden von der Berechnung ausgeschlossen. Ferner wurde das ganze Material in zwei Gruppen geteilt. Die erste enthält nur die Eigenbewegungen, die unterhalb 0"200 liegen. Sie sind entnommen der Zusammenstellung: »Mean positions and proper motions of groups of stars, whose annual proper motions are less than 0"200« (Einleitung, p. 113 u. ff.). Die zweite schließt neben diesen auch die Sterne ein, deren Eigenbewegung größer ist als 0"200 im Jahre, und ist entnommen aus »List of stars whose annual proper motions is greater than 0"200« (Einleitung, p. 112 u. ff.). Die Zahl der Sterne in der ersten Gruppe ist 3190, die Zahl der in die zweite Gruppe neu hinzukommenden Sterne beträgt 129.

Die Entwicklung selbst wurde, wie schon aus der ziemlich kleinen Breite der Deklinationszone ersichtlich ist, nur nach der Rektaszension durchgeführt. Von einer Entwicklung nach Kugelfunktionen, die nach beiden Koordinaten, der Rektaszension und der Deklination, fortschreiten, wurde abgesehen. Die Sichtung und Ordnung des Materials zu einer solchen übersteigt weitaus die Kräfte eines einzelnen Rechners.

Aus der ersten Gruppe wurden zunächst die folgenden als für die Mitte jeder Rektaszensionsstunde gültigen Mittelwerte berechnet (Einheit, in welcher in der Tafel die $\cos\delta\Delta\alpha$ angegeben sind, ist 0"001).

Zahl der Sterne	Mittlere Rektaszension	Mittlere Deklination	$\Delta\alpha$	$\cos\delta\Delta\alpha$	Angenommenes		Zahl der Sterne
					Mittel der Rektaszension	mittleres $\cos\delta\Delta\alpha$	
46	$0^h\ 39^m$	60°0	+ 17	+ 9			
61	24	49·9	11	7			
33	16	43·0	6	4			
31	47	42·3	13	10	$0^h\ 30^m$	+ 7·5	171
28	1 33	61·7	+ 19	+ 9			
60	6	58·3	17	11			
63	55	50·8	1	1			
22	17	42·5	17	13			
17	48	41·3	9	8	1 30	+ 8·4	190
13	2 21	57·1	+ 18	+ 10			
31	41	50·5	8	5			
10	12	41·2	— 16	— 12			
20	46	41·3	+ 4	+ 3	2 30	+ 3·0	74
17	3 33	61·0	— 2	— 1			
54	21	49·1	+ 21	+ 14			
27	18	42·4	17	13			
11	40	41·5	3	2	3 30	+ 10·2	109
21	4 27	59·8	+ 11	+ 6			
30	12	50·6	11	7			
30	52	50·0	3	2			

Zahl der Sterne	Mittlere Rektaszension	Mittlere Deklination	$\Delta\alpha$	$\cos\delta\Delta\alpha$	Angenommenes Mittel der Rektaszension	Angenommenes mittleres $\cos\delta\Delta\alpha$	Zahl der Sterne
14	$4^h\ 20^m$	41°7	+ 4	+ 3			
11	50	41·6	4	3	$4^h\ 30^m$	+ 4·4	106
30	5 40	58·5	+ 5	+ 2			
54	43	49·5	2	1			
28	19	41·0	— 5	— 4			
22	49	42·1	4	3	5 30	— 0·5	134
48	6 29	58·4	— 3	— 2			
23	18	49·3	10	7			
40	19	41·6	9	7			
25	47	41·5	12	9	6 30	— 5·6	136
38	7 35	58·6	— 9	— 5			
24	9	49·5	12	8			
9	49	52·3	32	20			
21	16	40·3	21	16			
8	50	41·9	21	15	7 30	— 10·2	100
19	8 36	61·4	— 15	— 7			
17	40	50·3	38	24			
14	21	42·2	30	22			
20	50	41·1	29	22	8 30	— 18·4	70
20	9 35	59·5	— 15	— 8			
23	19	50·1	12	8			
11	18	41·3	33	25			
16	53	40·3	51	39	9 30	— 17·8	70
22	10 36	58·6	— 39	— 20			
20	5	50·6	20	13			
27	55	49·0	28	18			
18	17	42·2	51	38			
18	47	42·3	44	33	10 30	— 23·5	105
26	11 30	59·5	— 23	— 12			
10	36	49·0	5	3			
25	17	42·2	30	22			
9	47	41·8	49	37	11 30	— 17·5	70
32	12 30	60·2	— 15	— 8			
10	27	49·9	33	22			
14	19	41·2	36	27			
8	50	41·9	43	32	12 30	— 17·3	64
17	13 30	58·5	— 8	— 4			
17	13	49·0	15	10			
16	46	50·8	39	25			
21	15	40·7	43	32			
14	45	41·9	35	26	13 30	— 19·4	85
18	14 35	59·8	— 29	— 15			
17	43	49·5	12	8			
19	16	40·9	25	19			
13	42	41·2	35	26	14 30	— 16·5	67
33	15 28	60·1	— 17	— 8			

Zahl der Sterne	Mittlere Rektaszension	Mittlere Deklination	$\Delta\alpha$	$\cos\delta\alpha\Delta$	Angenommenes		Zahl der Sterne
					Mittel der Rektaszension	mittleres $\cos\delta\Delta\alpha$	
20	15^h 25^m	50°5	− 7	− 4			
14	19	41·3	18	14			
8	45	41·9	19	14	15^h 30^m	− 8·7	75
21	16 32	60·6	− 2	− 1			
22	13	50·1	16	10			
7	45	50·0	23	15			
8	15	41·0	27	20			
9	46	41·8	25	19	16 30	− 10·1	67
9	17 19	60·4	+ 19	+ 9			
23	47	47·5	− 7	− 5			
8	15	40·0	17	13			
30	47	41·8	8	6	17 30	− 4·5	70
34	18 40	59·5	+ 3	+ 2			
48	24	49·5	4	3			
42	18	41·5	− 2	− 2			
81	46	41·1	11	8	18 30	− 2·5	205
40	19 36	59·2	+ 17	+ 9			
67	11	50·0	4	3			
63	57	49·0	5	3			
42	16	41·4	+ 1	+ 1			
77	46	40·8	− 5	− 4	19 30	+ 1·7	289
63	20 30	59·8	+ 10	+ 5			
90	37	50·6	11	7			
81	15	41·2	2	2			
45	47	41·8	17	13	20 30	+ 6·0	279
68	21 38	60·5	+ 16	+ 8			
65	24	51·0	8	5			
34	20	42·4	2	2			
40	44	41·5	6	5	21 30	+ 5·5	207
53	22 40	59·6	+ 35	+ 13			
91	7	51·1	9	6			
71	49	50·3	19	12			
21	18	41·1	− 1	− 1			
41	46	41·7	+ 19	+ 14	22 30	+ 9·5	277
45	23 31	60·4	+ 10	+ 5			
64	41	50·5	17	11			
27	15	41·9	15	11			
34	48	41·7	10	8	23 30	+ 8·8	170

I. Tafel der Eigenbewegungen der Groombridge-Sterne.

Eigenbewegungen unter 0ʺ200. Deklinationszone 38—65°.

AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne	AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne
0h	+ 0ʺ0087	341	12h	— 0ʺ0174	134
2	0·0069	264	14	0·0181	152
4	0·0073	215	16	0·0094	142
6	— 0·0031	250	18	0·0030	275
8	0·0136	170	20	+ 0·0038	568
10	0·0209	175	22	0·0078	484

Aus den Sternen ferner, deren Eigenbewegung größer ist als 0ʺ200, ergaben sich die nachstehenden Stundenmittel:

AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne	AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne	AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne
0h 11m	+ 0ʺ153	3	8h 43m	— 0ʺ211	4	16h 27m	— 0ʺ102	5
1 23	0·246	7	9 40	0·045	4	17 39	+ 0·338	2
2 32	0·187	3	10 29	0·066	8	18 27	0·050	9
3 22	0·139	3	11 23	0·195	9	19 31	— 0·047	11
4 36	0·340	2	12 26	0·234	7	20 25	+ 0·002	7
5 30	0·037	5	13 31	0·068	4	21 40	0·119	2
6 20	0·014	4	14 34	0·088	10	22 23	0·037	7
7 3	— 0·047	1	15 44	0·053	5	23 26	0·068	7

Bei der geringen Anzahl dieser Sterne verwertete ich ihre Eigenbewegungen nicht zu einer direkten Bestimmung der Sonnenbewegung, sondern vereinigte sie mit den schon angeführten zu neuen Mitteln von je zwei Doppelstunden.

II. Tafel der Eigenbewegungen der Groombridge-Sterne.

Einschließlich der Eigenbewegungen über 0ʺ200. Deklinationszone 38—65°.

AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne	AR	Δ α cos δ	Zahl der Sterne
0h	+ 0ʺ0111	351	12h	— 0ʺ0384	150
2	0·0150	274	14	0·0235	166
4	0·0107	220	16	0·0138	152
6	— 0·0028	279	18	+ 0·0003	286
8	0·0183	175	20	0·0028	586
10	0·0233	187	22	0·0087	493

Die Rechnung lieferte für die zwei Tafeln die folgenden zwei Fourier'schen Reihen:

I. Tafel: $\cos\delta\Delta\alpha =$	$-0^{\circ}00425$		$= -0^{\circ}00425$
	$+0\cdot01494 \cos\alpha$	$-0^{\circ}00043 \sin\alpha$	$+0\cdot01494 \cos(\alpha - 358^{\circ}4)$
	$-0\cdot00147 \cos 2\alpha$	$+0\cdot00139 \sin 2\alpha$	$+0\cdot00202 \cos(2\alpha - 136\cdot6)$
	$-0\cdot00133 \cos 3\alpha$	$+0\cdot00060 \sin 3\alpha$	$+0\cdot00146 \cos(3\alpha - 204\cdot3)$
	$+0\cdot00055 \cos 4\alpha$	$-0\cdot00084 \sin 4\alpha$	$+0\cdot00100 \cos(4\alpha - 302\cdot3)$
	$-0\cdot00056 \cos 5\alpha$	$-0\cdot00022 \sin 5\alpha$	$+0\cdot00060 \cos(5\alpha - 201\cdot4)$
	$+0\cdot00082 \cos 6\alpha$		$+0\cdot00082 \cos 6\alpha$
II. Tafel: $\cos\delta\Delta\alpha =$	$-0^{\circ}00596$		$= -0^{\circ}00596$
	$+0\cdot02223 \cos\alpha$	$+0^{\circ}00051 \sin\alpha$	$+0\cdot02224 \cos(\alpha - 1^{\circ}3)$
	$-0\cdot00451 \cos 2\alpha$	$+0\cdot00267 \sin 2\alpha$	$+0\cdot00524 \cos(2\alpha - 149\cdot4)$
	$-0\cdot00065 \cos 3\alpha$	$+0\cdot00160 \sin 3\alpha$	$+0\cdot00173 \cos(3\alpha - 67\cdot9)$
	$-0\cdot00149 \cos 4\alpha$	$-0\cdot00091 \sin 4\alpha$	$+0\cdot00175 \cos(4\alpha - 211\cdot4)$
	$+0\cdot00187 \cos 5\alpha$	$-0\cdot00046 \sin 5\alpha$	$+0\cdot00193 \cos(5\alpha - 346\cdot2)$
	$-0\cdot00169 \cos 6\alpha$		$-0\cdot00169 \cos 6\alpha$

Die Koeffizienten des vom einfachen Winkel α abhängigen Gliedes in den beiden Reihen bestimmen nach Gyldén die Bewegungsrichtung der Sonne. Man erhält für sie

aus der I. Reihe	$358^{\circ}4 - 90^{\circ} = 268^{\circ}4$
» » II. »	$1\cdot3 - 90 = 271\cdot3$

Werte, die in guter Übereinstimmung stehen, sowohl untereinander wie auch mit den Rechnungen Eddington's, der aus dem gleichen Material 267° fand. Die Koeffizienten des vom doppelten Winkel 2α abhängigen Gliedes sollen nach der Zweischwarmhypothese die relative Bewegungsrichtung der beiden Schwärme gegeneinander oder gegen die Sonne definieren. Man erhält die Werte

I. Reihe	$2\alpha = 136^{\circ}6$	$\alpha = 68^{\circ}3$
II. »	$2\alpha = 149\cdot4$	$\alpha = 74\cdot7$

die ebenfalls untereinander in recht guter Übereinstimmung sind, aber von dem von Eddington gefundenen Resultat

$$\alpha = 95^{\circ}$$

doch ziemlich abweichen. Inwieweit diese Differenz als aus zufälligen Beobachtungsfehlern entstanden erklärt werden kann, läßt sich zunächst nicht entscheiden. Ebenso würde aber auch jeder der weiteren Koeffizienten in den zwei eben gerechneten Fourier'schen Reihen die Bewegungsrichtung eines neuen Schwarmes relativ zur Sonne definieren und so das ganze Sternsystem sich aus einer Superposition vieler solcher Schwärme zusammensetzen, von denen jeder seine von ihm bevorzugte Bewegungsrichtung hätte.

Dieser Anschauung ist als neue die entgegenzusetzen, welche in Analogie mit dem geozentrischen Laufe der Planeten den Eigenbewegungen der Fixsterne die gleichen Bewegungsgesetze zuschreibt, wie sie im System der Planeten herrschen. Nach dieser neuen Annahme sind die Winkelgrößen in den einzelnen Gliedern der beiden Fourier'schen Reihen nicht voneinander unabhängig, sondern sie sind Vielfache des ersten Winkels. Mit welchem Grade der Genauigkeit dies der Fall ist, mindestens für die drei ersten Koeffizienten, zeigt die nachstehende Rechnung:

1. Aus der I. Reihe:		$\varepsilon = 358\overset{\circ}{.}4$
	$2\varepsilon = 136\overset{\circ}{.}6 + 540^\circ$, daher	$\varepsilon = 338 \cdot 3$
	$3\varepsilon = 204 \cdot 3 + 900$ »	$\varepsilon = 368 \cdot 1$
2. Aus der II. Reihe:		$\varepsilon = 361\overset{\circ}{.}3$
	$2\varepsilon = 149\overset{\circ}{.}9 + 540^\circ$ »	$\varepsilon = 344 \cdot 7$
	$3\varepsilon = 67 \cdot 9 + 900$ »	$\varepsilon = 322 \cdot 6$
3. Aus der p. 3 [299] mitgeteilten, von Gyldén berechneten Fourier'schen Reihe:		$\varepsilon = 363\overset{\circ}{.}9$
	$2\varepsilon = 198\overset{\circ}{.}3 + 540^\circ$ »	$\varepsilon = 399 \cdot 2$
	$3\varepsilon = 135 \cdot 4 + 900$ »	$\varepsilon = 345 \cdot 1$

und in dieser bedeutet der konstante Winkel ε die Richtung nach dem Zentralpunkte des Systems der Fixsterne oder $\varepsilon - 90^\circ$ die Bewegungsrichtung der Sonne.

Die Abweichungen der aus den zwei Gliedern zweiter und dritter Ordnung berechneten Werte von ε gegen den aus dem ersten und Hauptgliede abgeleiteten, sind nicht größer als jene, die sich bei der gleichen Berechnung in den für die Eigenbewegungen der Planeten aufgestellten Reihen, p. 8 u. 9 [304 u. 305], zeigten. Sie sind ebenfalls so groß, um auch den Unterschied zwischen den für den Zielpunkt der Relativbewegung der beiden Schwärme im Sinne Kapteyn-Eddington's gefundenen Resultaten

$$\alpha = 68\overset{\circ}{.}3, \text{ beziehungsweise } 74^\circ 7 \text{ und } \alpha = 95^\circ$$

als durch Beobachtungsfehler entstanden in genügender Weise zu erklären.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich aus den Koeffizienten der drei ersten Glieder, die p. 11 [307] mit δ_0 δ_1 und δ_2 bezeichnet wurden und deren Bedeutung dort ebenfalls angegeben ist, μ_0 berechnen läßt, und dies ist die mittlere jährliche Bewegung der Sonne in ihrem Umlaufe um den Zentralpunkt, vorausgesetzt, daß diese Bewegung in einer geschlossenen Bahn verläuft. Man erhält zunächst aus

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2}{\beta}\left[1 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{64}\beta^4 \ldots\right]$$

einen Näherungswert für β und hat dann

$$\mu_0 = \delta_0 - \delta_2 + \frac{2\delta_2(1-\beta^2)}{\beta^2}.$$

Die Rechnung gibt:

	I. Reihe: (Eigenbewegungen unter 0"200)	II. Reihe: (Alle Eigenbewegungen eingeschlossen)	III. Reihe: (Die Gyldén'sche)
δ_0	$-0\overset{''}{.}00425$	$-0\overset{''}{.}00596$	$-0\overset{''}{.}0240$
δ_1	$+0 \cdot 01494$	$+0 \cdot 02224$	$+0 \cdot 0582$
δ_2	$+0 \cdot 00202$	$+0 \cdot 00524$	$+0 \cdot 0127$
β	$0 \cdot 2704$	$0 \cdot 4712$	$0 \cdot 4364$
μ_0	$+0 \cdot 0449$	$+0 \cdot 0255$	$+0 \cdot 0713$

Werte, die, was ihre Größenordnung anlangt, wie man sieht, recht gut miteinander übereinstimmen und auf eine Umlaufszeit der Sonne führen, die zwischen 29, 50 und 18 Millionen Jahren liegt.

§ 5. Eigenbewegungen der Sterne von verschiedenem Spektraltypus.

Außer den mitgeteilten Angaben über die Eigenbewegungen der Sterne enthält derselbe Katalog der Greenwicher Sternwarte in seiner Einleitung unter dem Titel: »Comparison of mean proper motions of stars of spectral types I and II for each three hours of AR in the Zones« (Einleitung, p. 115 u. ff.) noch eine Zusammenstellung der Eigenbewegungen der Sterne von den zwei Spektraltypen I und II für je drei und drei Stunden der Rektaszension und für die Deklinationszonen 38—45°, 45—55°, 55—65°, 65—75° und 75—85°. Ihr wurden nur die folgenden für die drei ersten Zonen gültigen Angaben entnommen:

Tafel I. Eigenbewegungen der Sterne vom I. Spektraltypus.

Deklinationszone 38—65°. Einheit 0″001.

AR	δ	$\Delta\alpha$	$\cos\Delta\alpha$	Zahl der Sterne	Mittlere AR	Mittelwert $\cos\delta\Delta\alpha$	Zahl der Sterne
0^h— 3^h	60°	+ 22	+ 11	25			
	50	10	6	85			
	41·5	23	17	41	1^h 0^m	+ 0″0098	151
3 — 6	60	+ 4	+ 2	22			
	50	12	8	72			
	41·5	4	3	41	4 0	+ 0·0055	135
6 — 9	60	— 7	— 4	35			
	50	29	19	19			
	41·5	6	4	24	7 0	— 0·0077	78
9 —12	60	— 29	— 15	15			
	50	+ 4	+ 3	20			
	41·5	— 60	— 45	18	10 0	— 0·0184	53
12 —15	60	— 1	— 1	24			
	50	35	23	20			
	41·5	64	48	17	13 0	— 0·0213	61
15 —18	60	+ 19	+ 10	17			
	50	— 6	— 4	26			
	41·5	27	20	17	16 0	— 0·0055	60
18 —21	60	+ 10	+ 5	30			
	50	12	8	54			
	41·5	3	2	56	19 0	+ 0·0049	140
21 —24	60	+ 17	+ 9	54			
	50	11	7	53			
	41·5	18	13	56	22 0	+ 0·0093	163

Tafel II. Eigenbewegungen der Sterne vom II. Spektraltypus.

Deklinationszone 38—65°. Einheit 0ˢ001.

AR	δ	Δα	cos Δα	Zahl der Sterne	Mittlere AR	Mittelwert cos δ Δα	Zahl der Sterne
0^h — 3^h	60°	+ 0	0	19			
	50	12	+ 8	40			
	41·5	— 18	— 13	23	1^h 0^m	+ 0ˢ0004	82
3 — 6	60	+ 1	+ 1	19			
	50	16	10	28			
	41·5	14	10	26	4 0	+ 0·0077	73
6 — 9	60	— 18	— 9	30			
	50	15	10	26			
	41·5	25	19	37	7 0	— 0·0132	93
9 — 12	60	— 26	— 13	35			
	50	36	23	23			
	41·5	61	46	19	10 0	— 0·0241	77
12 — 15	60	— 21	— 11	19			
	50	23	15	18			
	41·5	39	29	22	13 0	— 0·0206	59
15 — 18	60	— 24	— 12	15			
	50	22	14	20			
	41·5	8	6	31	16 0	— 0·0098	66
18 — 21	60	+ 23	+ 12	24			
	50	— 4	— 3	43			
	41·5	2	1	27	19 0	+ 0·0014	94
21 — 24	60	+ 12	+ 6	26			
	50	29	13	34			
	41·5	31	23	12	22 0	+ 0·0125	72

Die hieraus sich ergebenden Fourier'schen Entwicklungen sind:

a) Sterne vom Spektraltypus I.

$$\cos\delta\Delta\alpha = -0^s00292 + 0{\cdot}00161\cos(\alpha - 352^\circ 8) + 0{\cdot}00031\cos(2\alpha - 163{\cdot}8) + 0{\cdot}00009\cos(3\alpha - 303{\cdot}0) + 0{\cdot}00006\cos(4\alpha - 240\ \ )$$

b) Sterne vom Spektraltypus II.

$$\cos\delta\Delta\alpha = -0^s00571 + 0{\cdot}00162\cos(\alpha - 349^\circ 8) + 0{\cdot}00032\cos(2\alpha - 161{\cdot}6) + 0{\cdot}00043\cos(3\alpha - 231{\cdot}4) + 0{\cdot}00023\cos(4\alpha - 240\ \ )$$

Sie zeigen, von dem konstanten Gliede der Reihe abgesehen, eine fast vollständige Übereinstimmung in den Koeffizienten wie in den Winkelgrößen der zwei ersten Glieder. Aus ihnen folgen für den Winkel ε die Werte

I. Reihe		II. Reihe	
	$\varepsilon = 352^\circ 8$		$\varepsilon = 349^\circ 8$
$2\varepsilon = 163^\circ 8 + 540^\circ$	$\varepsilon = 351 \cdot 9$	$2\varepsilon = 161^\circ 6 + 540^\circ$	$\varepsilon = 350 \cdot 8$

Erst in den dritten Gliedern zeigt sich ein Unterschied. Es wäre jedoch zu voreilig, aus diesem Umstande einen Schluß auf eine Verschiedenheit in den Eigenbewegungen der Sterne am Himmel zu ziehen, soweit sie von verschiedenem Spektraltypus sind.

§ 6. Über den Zusammenhang zwischen der Zahl der Planeten und ihrem geozentrischen Lauf.

Beziehen sich die bisherigen Untersuchungen auf den Nachweis eines Zusammenhanges zwischen der Größe der Eigenbewegungen der Sterne und der Planeten und ihrer Rektaszension, so soll im folgenden noch die Frage erörtert werden, in welchem Abhängigkeitsverhältnisse Abzählungen der Sterne zum Positionswinkel ihrer Eigenbewegung und in derselben Art Abzählungen der Planeten zu den einzelnen Stunden ihrer geozentrischen Rektaszensionen stehen, ein Problem, das auch der Kapteyn-Eddington'schen Hypothese näher liegt als das bisher behandelte. Es wird sich zeigen, daß auch hier zwischen den beiden Zahlengruppen ganz analoge Gesetze gelten und daher die Annahme, daß das System der Fixsterne in seinen Bewegungen ein dem System der Planeten analoges ist, vollständig zureicht und die Kapteyn'sche Hypothese von den zwei Schwärmen ganz gut ersetzen kann.

Vorerst werde die Frage behandelt, in welchem Verhältnisse die Zahl der Planeten in den einzelnen Rektaszensionsstunden zu ihrem geozentrischen Laufe steht. Die theoretische Entwicklung zur Beantwortung dieser Frage ist nach den p. 9 u. 10 [305 u. 306] sehr einfachen Voraussetzungen leicht durchführbar. Es braucht, um zu dem erstrebten Ziele zu gelangen, nur noch einer ergänzenden Hypothese, der nämlich, wie sich die Verteilung der Planeten gegenüber der Sonne, das heißt vom heliozentrischen Standpunkt aus, verhält. Die einfachste Annahme, die hier gemacht werden kann, dürfte die sein, daß diese Verteilung eine gleichförmige ist. Ist dies der Fall, dann ist offenbar die Zahl der Planeten in jedem Teile des Winkels P, der deren heliozentrische Bewegung darstellt, die gleiche oder die Zahl der Planeten ist proportional dP. In derselben Weise muß dann die Zahl der Planeten, vom geozentrischen Standpunkte aus betrachtet, proportional angesetzt werden der geozentrischen Rektaszension, das heißt $d\alpha$. Ersetzt man nunmehr

$$d\alpha \text{ durch } \frac{\partial \alpha}{\partial P}\, dP$$

so ist $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ das gesuchte Maß für die Anzahl der Planeten in jedem Teil des Himmels, beobachtet von der Erde aus, und die Entwicklung besteht darin, $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ als Funktion von α und $\frac{a_0}{a} = \beta$ darzustellen.

Man findet aus den p. 10 [—.] mitgeteilten Gleichungen durch Differentiation derselben nach P

$$\cos\alpha \frac{\partial \rho}{\partial P} - \rho \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial P} = -a \sin P$$

$$\sin\alpha \frac{\partial \rho}{\partial P} + \rho \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial P} = a \cos P.$$

ferner durch Multiplikation mit $-\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ und nachherige Addition

$$\rho \frac{\partial \alpha}{\partial P} = \alpha \cos(\alpha - P) = \rho - a_0 \cos(\alpha - \varepsilon)$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = 1 - \frac{a}{\rho} \beta \cos(\alpha - \varepsilon)$$

und hierin für $\frac{a}{\rho}$ den oben gefundenen Wert substituiert, schließlich

$$\frac{\partial\alpha}{\partial P} = \eta_0 + \eta_2 \cos 2(\alpha-\varepsilon) - \eta_1 \cos(\alpha-\varepsilon) - \eta_3 \cos 3(\alpha-\varepsilon) - \eta_5 \cos 5(\alpha-\varepsilon)\ldots$$

wenn

$$\eta_0 = 1 + \frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)} \quad \eta_2 = \frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}$$

$$\eta_1 = \beta\left(1 + \frac{7}{8}\beta^2 + \frac{55}{64}\beta^4\ldots\right)$$

$$\eta_3 = \frac{\beta^3}{8}\left(1 + \frac{15}{16}\beta^2 + \ldots\right)$$

$$\eta_5 = \frac{\beta^5}{64}(1 + \ldots)$$

ist.

Eine Abzählung der Planeten, die ich für die gleichen Jahrestage wie oben, nämlich 1888 Jänner 7., Mai 6., September 3. und Dezember 12. ausführte, gab mir Werte, die ich von je drei zu drei Stunden in Mittel vereinigte und die Mittelwerte hier angebe:

AR	Zahl der Planeten 1888			
	Jänner 7.	Mai 6.	September 3.	Dezember 12.
$1^h\ 30^m$	34	29	21	23
4 30	17	47	18	12
7 30	16	27	46	24
10 30	30	44	42	32
13 30	64	36	65	40
16 30	31	23	31	61
19 30	41	15	16	36
22 30	32	44	26	37
Summe	265	265	265	265

Die aus diesen Zahlen abgeleiteten Fourier'schen Reihen sind:

I. Reihe 1888 Jänner 7. . . $N = 33 \cdot 12 + 13 \cdot 19 \cos(\alpha - 245° 39')$
$+ 10 \cdot 84 \cos(2\alpha - 26\ \ 9)$
$+ 6 \cdot 37 \cos(3\alpha - 215\ \ 4)$
$+ 5 \cdot 63 \cos 4\alpha$

II. Reihe 1888 Mai 6. . . . $N = 33 \cdot 12 + 7 \cdot 66 \cos(\alpha - 93\ \ 31)$
$+ 6 \cdot 57 \cos(2\alpha - 6\ \ 57)$
$+ 6 \cdot 11 \cos(3\alpha - 236\ \ 44)$
$+ 6 \cdot 38 \cos(4\alpha - 180$

III. Reihe 1888 September 3. $N = 33 \cdot 12 + 18 \cdot 02 \cos(\alpha - 176\ \ 2)$
$+ 7 \cdot 65 \cos(2\alpha - 6\ \ 38)$
$+ 9 \cdot 11 \cos(3\alpha - 297\ \ 24)$
$+ 3 \cdot 88 \cos 4\alpha$

IV. Reihe 1888 Dezember 12. $N = 33 \cdot 12 + 16 \cdot 99 \cos(\alpha - 248° \, 42')$
$+ 1 \cdot 25 \cos(2\alpha - 98 \quad 8)$
$+ 7 \cdot 44 \cos(3\alpha - 5 \quad 20)$
$+ 2 \cdot 38 \cos 4\alpha.$

Was zunächst die in diesen Reihen vorkommenden Koeffizienten anlangt, so sollten sie nach der Theorie einander gleich sein. Die auftretenden Unterschiede zufälligen Umständen zuzuschreiben und durch aus diesen entstandene Fehler zu erklären, dürfte nicht schwer fallen. Nimmt man daher die Mittelwerte der Koeffizienten, so folgt schließlich die Reihe

$$N = 33 \cdot 12 + 13 \cdot 97 \cos(\alpha - \varepsilon_1) + 6 \cdot 58 \cos(2\alpha - \varepsilon_2) + 7 \cdot 16 \cos(3\alpha - \varepsilon_3) + 0 \cdot 19 \cos 4\alpha$$

Um sie mit der theoretischen, für $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ abgeleiteten zu vergleichen, hat man diese mit einem konstanten Faktor zu multiplizieren und denselben dann so zu bestimmen, daß sein Produkt mit dem Koeffizienten η_0 gleich 33·12 wird. Es muß, da die Zahl der Planeten als proportional $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ aufzufassen ist,

$$N = N_0 \left[\eta_0 + \eta_1 \cos(\alpha - \varepsilon) + \eta_2 \cos 2(\alpha - \varepsilon) + \eta_3 \cos 3(\alpha - \varepsilon) \ldots\right]$$

$$N_0 \eta_0 = 33 \cdot 12$$

sein. Die nachstehende Tafel enthält die Werte der Koeffizienten $N_0 \eta_1$ und $N_0 \eta_2$ (natürlich unter der Bedingung $N_0 \eta_0 = 33 \cdot 12$ berechnet) für die Werte $\lg \alpha = 0 \cdot 38$, $0 \cdot 39$, $0 \cdot 40$, $0 \cdot 41$ und $0 \cdot 42$, denen die $\lg \beta = 9 \cdot 62 - 9 \cdot 58$ entsprechen.

$\lg a$	0·38	0·39	0·40	0·41	0·42	Mittel
η_0	1·1051	1·0995	1·0942	1·0892	1·0845	
η_1	0·4911	0·4762	0·4619	0·4482	0·4351	
η_2	0·1051	0·0995	0·0942	0·0892	0·0845	
$N_0 \eta_1$	14·72	14·35	13·99	13·64	13·29	13·97
$N_0 \eta_2$	3·15	3·00	2·85	2·71	2·58	6·58

Der aus den tatsächlichen Abzählungen der Planeten abgeleitete Wert der Koeffizienten des ersten Gliedes, 13·97, führt zu $\lg a = 0 \cdot 4006$ als Mittelwert der Distanzen, in denen sich der Schwarm der Planeten um die Sonne bewegt, gegenüber dem oben p. 11 [307] aus den Eigenbewegungen gefundenen $\lg a = 0 \cdot 4562$, während jedoch der Koeffizient des zweiten Gliedes $N_0 \eta_2$ auf $\lg a = 0 \cdot 15$ hinweist. Theorie und Rechnung stehen hier nur bis zum Gliede erster Ordnung in Übereinstimmung.

Noch geringer ist die Übereinstimmung in betreff der Winkelgrößen ε. Diese sollen mit den entsprechenden und in den aus den Bewegungen der Planeten abgeleiteten Reihen vorkommenden identisch sein. Inwieweit dies der Fall ist, zeigt die nachstehende Zusammenstellung, die sich aber bloß auf die Winkel ε in den Gliedern erster Ordnung erstreckt.

	Aus den		AR der Sonne
	Abzählungen	Bewegungen	
	der Planeten		
1888 Jänner 7.	ε = 245° 39'	297° 54	299°
Mai 6.	93 31	56 10	52
September 3. . . .	176 2	169 56	171
Dezember 12. . . .	248 42	274 48	271

Es scheint daher, als ob die aus den Abzählungen der Planeten für die Rektaszension der Sonne oder die Bewegungsrichtung der Erde gewonnenen Resultate weitaus geringere Genauigkeit besitzen als die aus den Bewegungen berechneten.

Der Grund dieser hier auftretenden größeren Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung dürfte in mehreren Umständen zu suchen sein. Vorerst ist bei der kleinen Gesamtzahl der Planeten ein Fehler in der Zuweisung derselben zu den einzelnen Rektaszensionsstunden von größerem Einfluß als im Falle der Berechnung des Mittelwertes ihrer geozentrischen Bewegung für jede Stunde. Ferner dürfte die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Planeten vom heliozentrischen Standpunkt, eine Annahme auf der die theoretische Berechnung der Formel für $\frac{\partial \alpha}{\partial P}$ beruht, kaum richtig sein. Endlich wäre noch zu erwähnen, daß für beide hier in Betracht kommende Probleme die Entwicklung der geozentrischen Bewegungen wie der Abzählungen der Planeten in eine Fourier'sche Reihe eine größere Genauigkeit zu erzielen wäre durch eine Teilung nach Längengraden statt nach Rektaszensionsstunden. Denn es ist klar, daß die Bewegung in Deklination größer ist als die in Breite und die Vernachlässigung der ersteren beeinflußt das Resultat offenbar im Sinne einer Vergrößerung der Beobachtungsfehler. Ein bedeutend besseres Ergebnis würde daher eine Ephemeridensammlung der kleinen Planeten liefern, welche eine Darstellung deren geozentrischen Laufes in Länge und Breite statt in Rektaszension und Deklination enthielte.

§ 7. Die Sternabzählungen.

Aus den Angaben Eddington's[1] ergeben sich für die Abzählungen der Groombridge-Sterne aus den Deklinationsgrenzen 35—75° in ihrer Abhängigkeit vom Positionswinkel die nachstehenden Werte. Es sind dies die Summen der Zahlen in den in der Abhandlung Eddington's als *B, C, D, E, F* und *G* bezeichneten Gebieten. Das Gebiet *A*, als die Sterne von Deklinationen 75—90° umfassend, wurde nicht in Rechnung genommen.

Positions-winkel	Zahl der Sterne im Gebiete						Summe	Positions-winkel	Zahl der Sterne im Gebiete						Summe
	B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*			*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	
δ = 15°	186	50	14	15	15	112	392	δ = 195°	49	29	40	90	51	66	325
45	115	119	24	18	33	83	392	225	22	21	21	32	82	55	233
75	83	100	40	18	41	90	372	255	19	14	22	20	48	64	187
105	59	53	85	19	33	99	348	285	22	14	15	16	30	95	192
135	77	39	94	44	27	102	383	315	41	20	15	14	19	132	241
165	60	37	57	78	32	82	346	345	129	20	16	17	14	123	319

[1] Eddington, l. c. Monthly Notices 1907, p. 42.

Aus den in der Kolumne unter »Summe« stehenden Zahlen resultierte die folgende Fourier'sche Entwicklung:

$$\begin{aligned} N = 310\cdot 83 &+ 94\cdot 91 \cos(\delta - 84^\circ\ 8') \\ &+ 39\cdot 70 \cos(2\delta - 7\ 33) \\ &+ 6\cdot 40 \cos(3\delta - 96\ 26) \\ &+ 4\cdot 97 \cos(4\delta - 106\ 33) \\ &+ 7\cdot 14 \cos(5\delta - 307\ 58) \\ &+ 5\cdot 83 \cos 6\delta \end{aligned}$$

Zu einer, was die Winkelgrößen anlangt, fast vollständig mit dieser übereinstimmenden neuen Reihe gelangt man aus den Zahlenangaben Eddington's [1] in seiner zweiten Abhandlung, welche sich auf die Eigenbewegungen der Sterne in dem Boss'schen Kataloge stützt. Benützt wurden hiebei nur die Sterne aus den mit VIII—XVIII bezeichneten Gebieten, welche die Deklinationen 0—36° umfassen.

Positionswinkel	Zahl der Sterne im Gebiete										Summe
	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	
$\delta = 15°$	79·3	45·7	16·7	11·7	23·3	16·3	12·0	17·0	41·6	49·0	313
45	60·4	78·6	52·0	21·4	32·7	23·7	27·3	28·4	44·3	36·0	405
75	29·4	53·0	96·9	36·4	28·3	20·9	28·7	37·6	32·0	23·3	386
105	25·3	30·0	63·0	76·3	30·0	20·7	28·7	41·6	33·0	22·4	371
135	28·4	24·0	52·9	90·0	55·3	39·0	36·7	28·0	28·9	24·7	408
165	20·3	14·7	28·3	63·4	81·1	47·9	33·3	20·3	7·7	9·3	326
195	6·0	7·7	14·6	31·0	52·0	41·0	32·0	16·0	7·4	1·3	209
225	3·0	5·7	7·0	11·7	14·3	13·3	30·7	17·3	5·1	4·7	113
255	5·3	1·7	4·3	5·7	8·7	4·4	11·0	20·7	5·0	4·4	71
285	8·3	0·3	3·3	2·3	6·6	4·4	6·0	22·7	16·0	6·4	76
315	9·3	2·7	3·4	7·0	1·0	1·6	3·6	15·6	33·9	11·7	90
345	33·0	11·0	13·3	8·3	8·6	3·6	9·0	19·7	56·1	52·1	215

Die aus den Zahlen der letzten Kolumne folgende Fourier'sche Reihe lautet:

$$\begin{aligned} N = 248\cdot 6 &+ 179\cdot 4 \cos(\delta - 91^\circ\ 4') \\ &+ 23\cdot 1 \cos(2\delta - 6\ 32) \\ &+ 25\cdot 2 \cos(3\delta - 90\ 33) \\ &+ 6\cdot 8 \cos(4\delta - 217\ 34) \\ &+ 12\cdot 4 \cos(5\delta - 298\ 42) \\ &+ 2\cdot 4 \cos(6\delta - 180). \end{aligned}$$

Nach der Hypothese der zwei Sternschwärme hätte man die beiden Fourier'schen Entwicklungen so zu deuten: Die ersten, vom einfachen Winkel δ abhängigen Glieder repräsentieren die Bewegungsrichtung der Sonne. Der Positionswinkel, unter dem diese Richtung erscheint, ist, berechnet aus

$$\cos(\delta - \varepsilon_1) = 0$$

I. Reihe: $\varepsilon = 84^\circ\ 8' - 90^\circ = 354^\circ\ 8'$ II. Reihe: $\varepsilon = 91^\circ\ 4' - 90^\circ = 361^\circ\ 4'$

[1] Eddington, l. c. Monthly Notices, p. 17.

und die diesem Positionswinkel entsprechenden Rektaszensionen des Apex der Sonnenbewegung sind

I. Reihe: $\alpha_1 = 354° \; 8' - 90° = 264° \; 8'$ II. Reihe: $\alpha_2 = 361°9 \; 4' - 0° = 271° \; 8'$.

Die zwei vom doppelten Winkel δ abhängigen Glieder geben die Richtung der relativen Bewegung der beiden Schwärme, zu berechnen aus

zu $$\cos(2\delta - \varepsilon_2) = 1, \text{ daher } 2\delta - \varepsilon = 360°$$

I. Reihe: $\varepsilon = 183° \; 46'$ II. Reihe: $\varepsilon = 183° \; 16'$

und die diesen Positionswinkeln entsprechenden Rektaszensionen sind

$$\alpha_1 = 93° \; 46' \qquad \alpha_2 = 93° \; 16'.$$

Beide Resultate stehen sowohl untereinander wie mit denen Eddington's in sehr guter Übereinstimmung. Ebenso würde nun auch das dritte Glied einen Schwarm repräsentieren, dessen Bewegungsrichtung aus

$$3\delta - \varepsilon_3 = \text{Vielfachen von } 360°$$

zu berechnen wäre, usf.

Doch, wie schon früher erwähnt wurde, ist dieser Hypothese eine neue entgegenzustellen und der Hauptinhalt dieser neuen Anschauung geht dahin, dem System der Fixsterne die gleichen Gesetze in bezug auf die Bewegungen in ihm zuzuschreiben wie dem Schwarm der kleinen Planeten. Darnach müßten als Hauptbedingung die Winkelgrößen in den beiden Reihen die Beziehungsgleichungen

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$$

erfüllen, damit die Entwicklung nicht nach Vielfachen des Winkels δ, sondern der Winkeldifferenz $\delta - \varepsilon$, in der Form

$$N = N_0 + N_1 \cos(\delta - \varepsilon) + N_2 \cos 2(\delta - \varepsilon) + \ldots$$

fortschreitet. Wie weit diese Beziehungsgleichung hier erfüllt ist, zeigt die nachstehende Rechnung, die sich jedoch nur auf die drei ersten Glieder erstreckt:

I. Reihe:		II. Reihe:	
	$\varepsilon = 84° \; 8'$		$\varepsilon = 91° \; 4'$
$2\varepsilon = 7° \; 33' + 180$	$\varepsilon = 93 \; 46$	$2\varepsilon = 6° \; 32' + 180$	$\varepsilon = 93 \; 16$
$3\varepsilon = 96 \; 26 + 180$	$\varepsilon = 92 \; 9$	$3\varepsilon = 90 \; 33 + 180$	$\varepsilon = 90 \; 11$

Die Übereinstimmung der berechneten Werte ist auch hier eine sehr gute und eine Entscheidung, welcher Hypothese der Vorzug zu geben sei, darnach heute noch nicht möglich.

Der Winkel ε selbst bedeutet in dieser zweiten Hypothese den Positionswinkel, unter welchem die Richtung nach dem Zentralpunkt oder Zentralkörper des Systems der Fixsterne zu suchen ist. Im Mittel folgt für ihn

I. Reihe: $\varepsilon = 90° \; 1'$ II. Reihe: $91° \; 30'$

und die zugehörige Rektaszension ist

$$\alpha = 0° \; 1' \qquad \alpha = 1° \; 30',$$

während aus den Bewegungen der Groombridge-Sterne (p. 17 [313]) im Mittel etwa

$$\alpha = \frac{1}{2}(358° \; 4' + 1° \; 3') = 359° \; 33'$$

gefunden wurde.

Das Ergebnis der in dieser Abhandlung niedergelegten Untersuchung läßt sich dahin zusammenfassen:

1. Die Teilung des ganzen Systems der Fixsterne in einzelne Schwärme mit verschiedenen Bewegungsrichtungen, ebenso wie die Anschauung einer Art krystallinisch gebauten Raumes, in dem die Geschwindigkeitsausbreitung nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene ist, ist zur Erklärung der eigentümlichen in den Spezialbewegungen der Sterne nachgewiesenen Gesetzmäßigkeiten weder notwendig noch gerechtfertigt.

2. Die harmonische Analyse der Eigenbewegungen der Sterne, sowohl was ihre Größe anlangt, als auch was rein statistische Abzählungen der Sterne im Verhältnisse zum Positionswinkel der Eigenbewegungen betrifft, führt vielmehr zu der Vorstellung, daß die konstatierten Gesetzmäßigkeiten den gleichen Charakter zeigen wie jene, die sich im geozentrischen Lauf der kleinen Planeten vorfinden.

3. Die Frage jedoch, ob durch diese Vorstellung schon der Beweis dafür erbracht ist, daß so wie die Planeten sich auch die Sterne in geschlossenen Bahnen um einen Zentralkörper oder einen Zentralpunkt bewegen, bleibt noch offen.

Sollte die vorliegende Abhandlung eine Anregung zur Lösung dieser Frage gegeben haben, dann hat sie ihren Hauptzweck erreicht.

